A 55-a OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

AL IV-LEA TEST DE SELECŢIE PENTRU OJBM 2003

22 mai 2004 – Bucureşti

Subiectul 1. Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi M un punct pe arcul BC care nu-l conţine pe A. Tangentele din M la cercul înscris în triunghiul ABC intersectează cercul $\mathcal{C}$ în punctele N şi P.

Să se arate că dacă $\angle BAC = \angle NMP$, atunci triunghiurile ABC şi MNP sunt congruente.

Subiectul 2. Numerele reale $a_1, a_2, \ldots a_{100}$ satisfac relaţia

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{100}^2 + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{100})^2 = 101.$$

Să se arate că $|a_k| \leq 10$, oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, 100$.

Subiectul 3. O mulţime finită de numere naturale se numeşte *izolată* dacă suma numerelor oricărei submulţimi proprii este un număr prim cu numărul dat de suma elementelor mulţimii.

a) Să se arate că mulţimea $A = \{4, 9, 16, 25, 36, 49\}$ este izolată;

b) Să se determine numerele compuse n pentru care există numerele naturale a, b, astfel încât mulţimea

$$A = \{(a+b)^2, (a+2b)^2, (a+3b)^2, \ldots (a+nb)^2\}$$

să fie izolată.

Subiectul 4. Se consideră un poligon regulat cu 1000 de laturi având vârfurile colorate cu roşu, galben şi albastru. Numim *mutare* alegerea a două vârfuri vecine diferit colorate şi recolorarea acestora cu a treia culoare.

Să se arate că există un număr finit de mutări după efectuarea cărora vârfurile poligonului vor avea aceeaşi culoare.

Timp de lucru: 4 ore